Θέμα Α

Α1 –δ , Α2 – δ , Α3 – γ , Α4 – β , Α5 α – Λ, β – Σ , γ – Λ , δ – Σ , ε – Λ

Θέμα Β

Β1. α) Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Η πίεση στο σημείο Β είναι: $p_B = p_{atm} + \frac{w}{A} + \frac{\rho gh}{5}$

Η πίεση στο σημείο Γ του πυθμένα είναι $p_\Gamma = p_{atm} + \frac{w}{A} + \rho gh$

Η διαφορά πίεσης των σημείων Β και Γ είναι

$$\Delta p = p_\Gamma - p_B \Rightarrow \Delta p = p_{atm} + \frac{w}{A} + \rho gh - p_{atm} - \frac{w}{A} - \frac{\rho gh}{5} \Rightarrow \Delta p = \frac{4}{5}\rho gh \Rightarrow 4,8\cdot 10^3 = \frac{4}{5}\rho gh \Rightarrow$$

$$p_{\upsilon\delta\rho} = \rho gh = \frac{5}{4}\cdot 4,8\cdot 10^3 \frac{N}{m^2} \Rightarrow \boxed{p_{\upsilon\delta\rho} = \rho gh = 6\cdot 10^3 \frac{N}{m^2}}$$

β) Σωστή απάντηση είναι η (α).

Η εφαρμοζόμενη δύναμη προκαλεί αύξηση της πίεσης στο έμβολο κατά Δp η οποία μεταδίδεται αναλλοίωτη στον πυθμένα του δοχείου.

Ισχύει: $\Delta p = \Delta p' \Rightarrow \frac{F}{A_1} = \frac{F'}{A_2} \Rightarrow \frac{F}{A_1} = \frac{F'}{20A_1} \Rightarrow F' = 20F = 20\cdot 2w \Rightarrow \boxed{F' = 40w}$

Β2. Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Όταν ο παρατηρητής κινείται προς την πηγή S_1 με μέτρο ταχύτητας υ_A αντιλαμβάνεται δύο ήχους που έχουν λόγο συχνοτήτων $\frac{f_{A_1}}{f_{A_2}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\frac{\upsilon+\upsilon_A}{\upsilon-\upsilon_S} f_1}{\frac{\upsilon-\upsilon_A}{\upsilon-\upsilon_S} f_2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\upsilon+\upsilon_A}{\upsilon-\upsilon_A}\frac{f_1}{f_2} = \frac{3}{4} (1)$.

Όταν κινείται προς την πηγή S_2 επίσης με μέτρο ταχύτητας υ_A αντιλαμβάνεται δύο ήχους που έχουν λόγο συχνοτήτων $\frac{f'_{A_1}}{f'_{A_2}} = \frac{16}{27} \Rightarrow \frac{\frac{\upsilon-\upsilon_A}{\upsilon-\upsilon_S} f_1}{\frac{\upsilon+\upsilon_A}{\upsilon-\upsilon_S} f_2} = \frac{16}{27} \Rightarrow \frac{\upsilon-\upsilon_A}{\upsilon+\upsilon_A}\frac{f_1}{f_2} = \frac{16}{27} (2)$.

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις σχέσεις $(1),(2)$ έχουμε:

$$\frac{\upsilon+\upsilon_A}{\upsilon-\upsilon_A}\frac{f_1}{f_2}\cdot\frac{\upsilon-\upsilon_A}{\upsilon+\upsilon_A}\frac{f_1}{f_2} = \frac{3}{4}\cdot\frac{16}{27} \Rightarrow \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \boxed{\frac{f_1}{f_2} = \frac{2}{3}}$$

Β3. Σωστή απάντηση είναι η (β).

Τη χρονική στιγμή $t = \frac{3T}{4}$ αντικαθιστώντας στις εξισώσεις έχουμε:

$x_1 = A\cdot\eta\mu(\omega t) \Rightarrow x_1 = A\cdot\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{3T}{4}\right) = A\cdot\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow x_1 = -A$ και

$$x_2 = 1,2A\cdot\eta\mu(\omega t+\pi) = 1,2A\cdot\eta\mu\left(\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{3T}{4}+\pi\right) = 1,2A\cdot\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}+\pi\right) = 1,2A\cdot\eta\mu\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$x_2 = +1,2A$

Από την αρχή της επαλληλίας έχουμε: $x = x_1 + x_2 = -A + 1,2A \Rightarrow \boxed{x = +0,2A}$

Θέμα Γ

Γ1. Η θέση $x=0$, είναι κοιλία και ταλαντώνεται με εξίσωση $y=0,2\cdot\eta\mu(20\pi t)\,S.I.$ άρα $2A=0,2m \Rightarrow A=0,1m$ και $\omega=20\pi\dfrac{rad}{s}\Rightarrow 2\pi f=20\pi\dfrac{rad}{s}\Rightarrow f=10Hz\rightarrow T=0,1s$.

Αφού η οριζόντια απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κοιλιών που κάθε στιγμή έχουν την ίδια φάση είναι $40cm$ ισχύει $\lambda=40cm=0,4m$. Η εξίσωση του στάσιμου κύματος είναι:

$$y=2A\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\Rightarrow \boxed{y=0,2\cdot\sigma\upsilon\nu(5\pi x)\cdot\eta\mu(20\pi t)\,S.I.}$$

Γ2. Οι θέσεις των δεσμών βρίσκονται από την εξίσωση:

$$x=(2\kappa+1)\frac{\lambda}{4}=(2\kappa+1)\frac{0,4}{4}\Rightarrow x=0,2\kappa+0,1$$

Ο αριθμός των δεσμών μεταξύ των σημείων Σ και Μ που βρίσκονται στις θέσεις $x_\Sigma=-0,6m$ και $x_M=+0,6m$ είναι $-0,6m\le x\le +0,6m \Rightarrow -0,6\le 0,2\kappa+0,1-\le +0,6\Rightarrow -3,5\le\kappa\le +2,5$ άρα

$$\kappa=-3,-2,-1,0,1,2\rightarrow \boxed{6\,\delta\varepsilon\sigma\mu o\acute{\iota}}$$

Γ3. Για την αρχή O: $y_O=0,2\cdot\eta\mu(20\pi t)\,S.I.\rightarrow\Phi_O=20\pi t$

Για το σημείο Σ: $y_\Sigma=0,2\cdot\sigma\upsilon\nu(5\pi\cdot(-0,6))\cdot\eta\mu(20\pi t)=0,2\cdot\cancel{\sigma\upsilon\nu(-3\pi)}^{(-1)}\cdot\eta\mu(20\pi t)\Rightarrow$

$y_\Sigma=-0,2\cdot\eta\mu(20\pi t)\Rightarrow y_\Sigma=0,2\cdot\eta\mu(20\pi t+\pi)\Rightarrow\Phi_\Sigma=20\pi t+\pi$

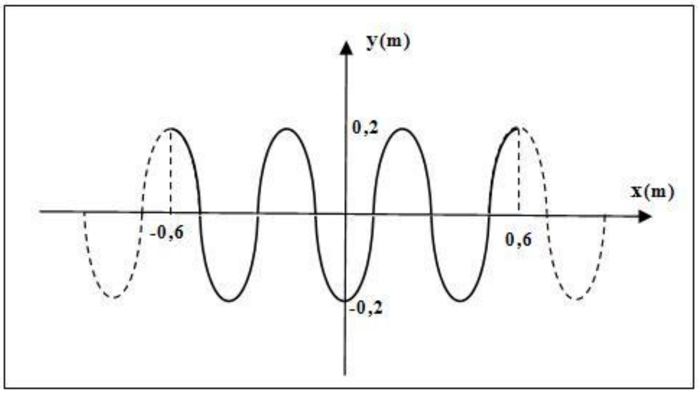
Η διαφορά φάσης μεταξύ του σημείου Σ και της αρχής O είναι:

$$\Delta\Phi=\Phi_\Sigma-\Phi_O=20\pi t+\pi-20\pi t\Rightarrow\boxed{\Delta\Phi=\pi\,rad}$$

Γ4. Τα σημεία Σ και Μ ισαπέχουν από την αρχή του άξονα, είναι κοιλίες του στάσιμου κύματος (όπως φαίνεται και από το ερώτημα Γ3) και έχουν διαφορά φάσης $\pi\,rad$ με την αρχή O. Τη χρονική στιγμή $t=0$ η ταλάντωση της αρχής ξεκινά με το σημείο O να βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του και να κινείται προς τα πάνω, οπότε το σημείο Μ θα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του και θα κινείται προς τα κάτω. Η χρονική στιγμή που το σημείο Μ έχει μέγιστη θετική απομάκρυνση για πρώτη φορά είναι η $t=\dfrac{3T}{4}=0,075s$. Το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος τη χρονική στιγμή $t=0,15s$ έχει εξίσωση:

$$y=0,2\cdot\sigma\upsilon\nu(5\pi x)\cdot\eta\mu(20\pi\cdot 0,075)=0,2\cdot\sigma\upsilon\nu(5\pi x)\cdot\cancel{\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2}\right)}^{(-1)}\Rightarrow y=-0,2\cdot\sigma\upsilon\nu(5\pi x)\,S.I.$$

Για τη θέση $x=0$ τη χρονική στιγμή $t=0,075s$ έχουμε $y=-0,2m$, οπότε όλες οι κοιλίες θα βρίσκονται στις ακραίες θέσεις τους. Γνωρίζοντας ότι οι διαδοχικές κοιλίες έχουν διαφορά φάσης $\pi\,rad$ το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος για τα σημεία που βρίσκονται στις θέσεις $-0,6m\le x\le +0,6m$ είναι αυτό που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



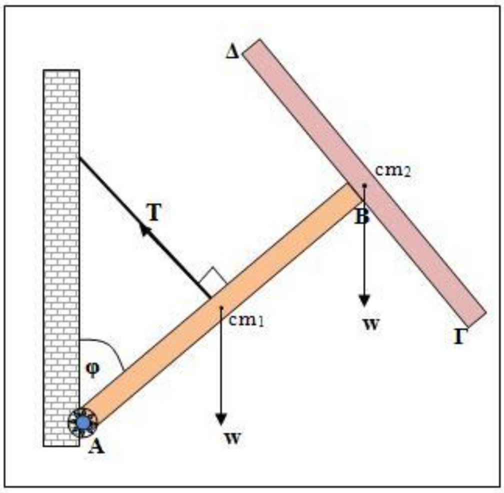
Γ5. Όταν μεταξύ της αρχής O και του σημείου Μ να υπάρχουν μόνο δύο δεσμοί και τα σημεία O και Μ παραμένουν κοιλίες τότε η απόσταση $OM = 0,6m = \lambda'$ οπότε ισχύει:

$$\upsilon = \lambda f = \lambda' f' \Rightarrow 0,4 \cdot 10 = 0,6 \cdot f' \Rightarrow f' = \frac{20}{3} Hz$$

Το ποσοστό μεταβολής της συχνότητας της χορδής είναι:

$$\pi = \frac{f' - f}{f} 100\% = \frac{20/3 - 10}{10} 100\% \Rightarrow \boxed{\pi = -33,3\%}$$

Θέμα Δ



Δ1. Στην κατάσταση ισορροπίας ισχύουν για το σύστημα των δύο ράβδων: $\Sigma F_x = 0,\ \Sigma F_y = 0$ και

$$\Sigma \tau_{\mathrm{A}} = 0 \Rightarrow \tau_{\mathrm{T}} - \tau_{w_{AB}} - \tau_{w_{\Gamma\Delta}} = 0 \Rightarrow$$

$$\mathrm{T} \cdot \frac{\ell}{2} - w \frac{\ell}{2} \cdot \eta\mu\varphi - w\ell \cdot \eta\mu\varphi = 0 \Rightarrow$$

$$\mathrm{T} = mg \cdot \eta\mu\varphi + 2mg \cdot \eta\mu\varphi \Rightarrow$$

$$\mathrm{T} = 3mg \cdot \eta\mu\varphi \Rightarrow \boxed{\mathrm{T} = 10,8N}$$

Δ2. Για τη ροπή αδράνειας του συστήματος των δύο ράβδων ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το άκρο Α της ράβδου ΑΒ έχουμε:

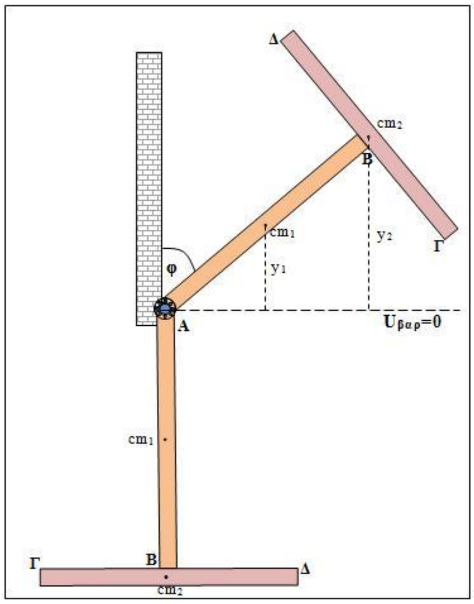
$$I_{o\lambda(\mathrm{A})} = I_{\mathrm{AB}} + I_{\Gamma\Delta} = \left[I_{cm} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \right]_{(\mathrm{AB})} + \left[I_{cm} + m\ell^2 \right]_{(\Gamma\Delta)} \Rightarrow$$

$$I_{o\lambda(\mathrm{A})} = \left[\frac{1}{12} m\ell^2 + m\frac{\ell^2}{4} \right]_{(\mathrm{AB})} + \left[\frac{1}{12} m\ell^2 + m\ell^2 \right]_{(\Gamma\Delta)} = \left[\frac{1}{3} m\ell^2 \right]_{(\mathrm{AB})} + \left[\frac{13}{12} m\ell^2 \right]_{(\Gamma\Delta)} \Rightarrow$$

$$\boxed{I_{o\lambda(\mathrm{A})} = \frac{17}{12} m\ell^2 = 0,85 Kg \cdot m^2}$$

Δ3. Η γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος τη στιγμή που η ράβδος ΑΒ σχηματίζει γωνία θ με τον κατακόρυφο τοίχο υπολογίζεται από τον Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής κίνησης:

$$\Sigma\tau = I_{o\lambda(\mathrm{A})} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Sigma\tau}{I_{o\lambda(\mathrm{A})}} = \frac{w\frac{\ell}{2} \cdot \eta\mu\theta + w\ell \cdot \eta\mu\theta}{I_{o\lambda(\mathrm{A})}} = \frac{3mg\ell \cdot \eta\mu\theta}{2I_{o\lambda(\mathrm{A})}} \Rightarrow \boxed{\alpha_{\gamma\omega\nu} = 9\frac{rad}{s^2}}$$



Δ4. Στο σύστημα των δύο ράβδων ασκούνται τα βάρη τους. Εφαρμόζοντας την ΑΔΜΕ έχουμε:

$$E_{\mathrm{MHX}_{\alpha\rho\chi}} = E_{\mathrm{MHX}_{\tau\varepsilon\lambda}} \Rightarrow K_{o\lambda,\alpha\rho\chi} + U_{o\lambda,\alpha\rho\chi} = K_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda} + U_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$K_{o\lambda,\alpha\rho\chi} + U_{\mathrm{AB},\alpha\rho\chi} + U_{\Gamma\Delta,\alpha\rho\chi} = K_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda} + U_{\mathrm{AB},\tau\varepsilon\lambda} + U_{\Gamma\Delta,\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$0 + mg \cdot y_1 + mg \cdot y_2 = K_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda} - mg \cdot \frac{\ell}{2} - mg \cdot \ell \Rightarrow$$

$$mg \cdot \frac{\ell}{2} \sigma\upsilon\nu\varphi + mg \cdot \ell\sigma\upsilon\nu\varphi = K_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda} - mg \cdot \frac{\ell}{2} - mg \cdot \ell \Rightarrow$$

$$0,8 \cdot mg \cdot \frac{\ell}{2} + 0,8 \cdot mg \cdot \ell = K_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda} - mg \cdot \frac{\ell}{2} - mg \cdot \ell \Rightarrow$$

$$1,8 \cdot mg \cdot \frac{\ell}{2} + 1,8 \cdot mg \cdot \ell = K_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$K_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda} = 2,7 \cdot mg \cdot \ell \Rightarrow \boxed{K_{o\lambda,\tau\varepsilon\lambda} = 16,2J}$$

Δ5. Στο σύστημα των ράβδων ΑΒ και ΚΛ ασκούνται τα βάρη τους. Εφαρμόζοντας την ΑΔΜΕ έχουμε:

$$E_{\text{ΜΗΧ}_{αρχ}} = E_{\text{ΜΗΧ}_{τελ}} \Rightarrow K_{ολ,αρχ} + U_{ολ,αρχ} = K_{ολ,τελ} + U_{ολ,τελ} \Rightarrow$$

$$K_{ολ,αρχ} + U_{\text{ΑΒ},αρχ} + U_{\text{ΓΔ},αρχ} = K_{ολ,τελ} + U_{\text{ΑΒ},τελ} + U_{\text{ΓΔ},τελ} \Rightarrow$$

$$0+0+0 = \frac{1}{2} I'_{ολ(\text{Α})}\omega^2 - mg\cdot\frac{\ell}{2} - m_1 g\cdot\ell \Rightarrow I'_{ολ(\text{Α})}\omega^2 = mg\cdot\ell + 2m_1 g\cdot\ell$$

$$\omega^2 = \frac{mg\cdot\ell + 2m_1 g\cdot\ell}{I'_{ολ(\text{Α})}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{mg\cdot\ell + 2m_1 g\cdot\ell}{I'_{ολ(\text{Α})}}} \Rightarrow \omega = \sqrt{20}\,\frac{rad}{s} = 2\sqrt{5}\,\frac{rad}{s}$$

Για την κρούση του συστήματος των ράβδων και του σώματος Σ εφαρμόζουμε ΑΔΣ:

$$\vec{L}_{ολ,αρχ} = \vec{L}_{ολ,τελ} \Rightarrow \vec{L}_{συστ} + \vec{L}_{\Sigma} = \vec{L}'_{συστ} + \vec{L}'_{\Sigma} \xrightarrow{\otimes +} L_{συστ} = L'_{συστ} + L'_{\Sigma} \Rightarrow$$

$$I'_{ολ(\text{Α})}\omega = I'_{ολ(\text{Α})}\omega' + \text{M}\upsilon'\ell \Rightarrow I'_{ολ(\text{Α})}(\omega - \omega') = \text{M}\upsilon'\ell \, (1)$$

Η κρούση είναι ανελαστική οπότε διατηρείται και η κινητική ενέργεια του συστήματος των ράβδων και του σώματος Σ, οπότε: $K_{ολ,πριν} = K_{ολ,μετά} \Rightarrow K_{συστ} + K_{\Sigma} = K'_{συστ} + K'_{\Sigma} \Rightarrow$

$$I'_{ολ(\text{Α})}\left[\omega^2 - (\omega')^2\right] = M(\upsilon')^2 \Rightarrow I'_{ολ(\text{Α})}(\omega-\omega')(\omega+\omega') = M(\upsilon')^2 \, (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις $(1),(2)$ έχουμε:

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \omega + \omega' = \frac{\upsilon'}{\ell} \, (3)$$

Από $(1) \Rightarrow \sqrt{20} - \omega' = \upsilon'$ και $(3) \Rightarrow \sqrt{20} + \omega' = \upsilon'$ προκύπτει $\boxed{\omega' = 0}$ και $\upsilon' = \sqrt{20}\,\frac{m}{s} = 2\sqrt{5}\,\frac{m}{s}$.

Το σώμα Σ αμέσως μετά την κρούση βρίσκεται στη θέση ισορροπίας της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί οπότε:

$$\upsilon' = \upsilon_{\max} \Rightarrow \upsilon' = \omega_{ταλ}\cdot A \Rightarrow \upsilon' = \sqrt{\frac{k}{M}}\cdot A \Rightarrow 2\sqrt{5} = \sqrt{\frac{80}{1}}\cdot A \Rightarrow \sqrt{80}A = 2\sqrt{5} \Rightarrow$$

$$4\sqrt{5}A = 2\sqrt{5} \Rightarrow \boxed{A = 0,5m}$$